SISTEMAS LINEARES

Aula 5 – Transformada de Laplace

- Introdução
- Transformada de Laplace
- Convergência da transformada de laplace
- Exemplos
- Região de Convergência

INTRODUÇÃO

- Transformações matemáticas:
  - Logaritmo:
    - transforma um problema de multipliacação em um problema mais simples, de adição ou subtração

$$A = B.C$$

$$\log(A) = \log(B.C) = \log(B) + \log(C)$$

INTRODUÇÃO

- Transformações matemáticas:
  - Fasor:
    - Converte um sinal senoidal em um número complexo que pode ser manipulado algebricamente

$$y_1 = 20\cos(wt - 30°)$$
$$y_2 = 40\cos(wt + 60°)$$

$$y = y_1 + y_2$$

$$y = 20\angle - 30° + 40\angle 60° = 17{,}3 + j10 + 20 + j34{,}6$$
$$y = 44{,}7\angle 33{,}4° = 44{,}7\cos(wt + 33{,}4°)$$

INTRODUÇÃO

- A Transformada de Laplace é uma representação alternativa ao domínio do tempo, para sinais e sistemas lineares e invariantes no tempo contínuo (SLITC);

- Trata-se de um operador linear muito útil à análise e ao estudo dos SLITCs, e à resolução de Equações Diferenciais Lineares de Coeficientes Constantes (EDLCCs);

- Em circuito lineares usamos a Transformada de Laplace para transformar EDLCCs do domínio do tempo em equações algébricas do domínio da frequência;

TRANSFORMADA DE LAPLACE

- Definição:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

- s é uma variável complexa: $s = \sigma + j\omega$

- O resultado do cálculo da integral é função de s;

- O sinal $x(t)$ e a sua Transformada de Laplace $X(s)$ (e uma região de convergência) formam um par, expresso por:

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s)$$

CONVERGÊNCIA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

- Por ser gerada por uma integral imprópria, a Transformada de Laplace não existe para todo sinal $x(t)$;

- De forma geral, em problemas de engenharia, usa-se o limite inferior da integral igual a zero (sinais causais). Desta forma, a transformada é chamada de **Transformada de Laplace Unilateral**;

- A Região de Convergência (**RDC**) de uma Transformada de Laplace especifica o intervalo de valores da variável complexa s para os quais $X(s)$ converge;

- A **RDC** deve ser especificada juntamente com a expressão algébrica da transformada para se garantir a correspondência unívoca entre $x(t)$ e $X(s)$;

EXEMPLO 1

- Dado $x(t) = e^{-at}u(t), a > 0 \; e \; a \in \Re$ determine a transformada de Laplace.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t}dt$$

$$X(S) = -\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_{0}^{\infty}$$

  - Sabe-se que $\lim_{t\to\infty} e^{-(s+a)t} = 0 \leftrightarrow Re(s) + a > 0$

- Se $Re(s) > -a$, $\qquad X(s) = \frac{1}{s+a}$

EXEMPLO 2

- Dado $x(t) = -e^{-at}u(-t), a > 0$ e $a \in \Re$ determine a transformada de Laplace.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-at}u(-t)e^{-st}dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-at}e^{-st}dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t}dt$$

$$X(S) = \frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_{-\infty}^{0}$$

  - Sabe-se que $\lim_{t\to-\infty} e^{-(s+a)t} = 0 \leftrightarrow Re(s) + a < 0$

- Se $Re(s) < -a$, $\qquad X(s) = \frac{1}{s+a}$

EXEMPLO 3

- Dado $x(t) = e^{at}u(-t), a > 0$ e $a \in \Re$ determine a transformada de Laplace.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}u(-t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-(s-a)t}dt$$

$$X(S) = -\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\Big|_{-\infty}^{0}$$

  - Sabe-se que $\lim_{t\to-\infty} e^{-(s-a)t} = 0 \leftrightarrow Re(s) - a < 0$

- Se $Re(s) < a$, $\quad X(s) = -\frac{1}{s-a}$

PÓLOS E ZEROS

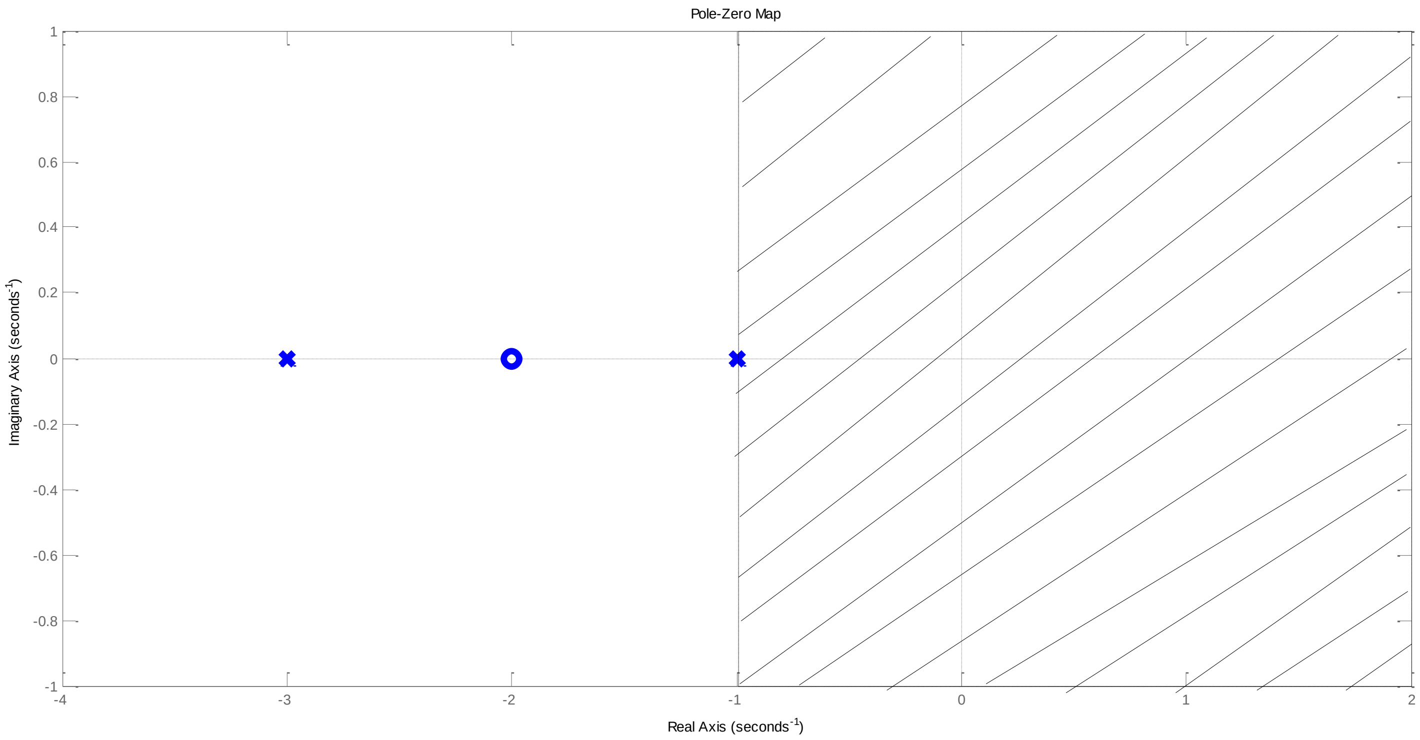
- Seja $X(s)$ uma função racional de s:

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} = \frac{b_0 (s - z_1) \dots (s - z_m)}{a_0 (s - p_1) \dots (s - p_n)}$$

- Pólos são raízes do polinômio do denominador, $D(s)$: $p_1 \dots p_n$
- Zeros são raízes do polinômio do numerador, $N(s)$: $z_1 \dots z_n$
- A função racional $X(s)$ é dita ser própria se $n > m$
- A **RDC** não contém pólos, pois $X(s)$ não converge nos pólos
- $X(s)$ pode ser especificada completamente por seus zeros e pólos
- Graficamente, os pólos são representados por '**x**' e zeros por '**o**'

EXEMPLO

$$X(s) = \frac{2(s+2)}{s^2+4s+3} = 2\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}, Re(s) \succ 1$$



REGIÃO DE CONVERGÊNCIA (RDC)

- A **RDC** não contém pólo(s)

- A **RDC** é sempre limitada por uma reta vertical, pois a condição de convergência está na parte real de s, $Re(s)$

- Existe pelo menos um pólo na afronteira da **RDC** de uma $X(s)$ racional

- A **RDC** é sempre uma região contígua, isto é, ela ñao pode ser formada por regiões desconexas

REGIÃO DE CONVERGÊNCIA (RDC) - PROPRIEDADES

- Se $x(t)$ é:

  - Finito, ou seja, $x(t) = 0$ para $t < t_1$ e $t > t_2$, então a **RDC** será todo plano s, exceto possivelmente $s = \ 0$ ou $s \rightarrow \infty$;

  - Unilateral direito, ou seja, $x(t) = 0$ para $t < t_0$, então a **RDC** será da forma $Re(s) > \sigma_{máx}$, ou seja, um semi-plano à direita de $\sigma_{máx}$;

  - Unilateral esquerdo, ou seja, $x(t) = 0$ para $t > t_0$, então a **RDC** será da forma $Re(s) < \sigma_{min}$, ou seja, um semi-plano à esquerda de σ_{min};

  - Bilateral, ou seja, duração infinita, então a RDC poderá ser uma faixa vertical entre as linhas verticais $\sigma_1 < Re(s) < \sigma_2$;

BIBLIOGRAFIA

- LATHI, B. P. Sinais e sistemas lineares. 2. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. 856 p. ISBN 9788560031139
- HAYKIN, Simon S. Sinais e sistemas. Porto Alegre: Bookman, 2001. 668 p.