SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

DEFINIÇÃO

Dá-se o nome de ***superfície quádrica*** ou simplesmente ***quádrica*** ao gráfico de uma equação do segundo grau, nas variáveis **x, y** e **z,** da forma:

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0$, que mediante uma rotação ou translação de eixos, ou até mesmo através dos dois movimentos simultaneamente, se transforma em um dos dois tipos de equações:

1) $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \text{D}$

2) $Ax^2 + By^2 + Iz = 0$

SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

DEFINIÇÃO

Superfície de revolução é a superfície gerada pela rotação ou revolução de uma ***curva plana*** ou ***cônica*** em torno de um de seus eixos ou em torno de uma reta fixa pertencente ao plano da curva plana ou cônica.

A reta fixa ou eixo em torno da(o) qual rotacionou a curva plana ou cônica é denominada de **eixo da superfície** e a curva plana ou cônica é a **geratriz.**

Exemplo: Obtenha uma equação e faça o esboço do gráfico da superfície gerada pela rotação da cônica $x^2 - 4z^2 = 16$ e identifique a superfície em cada caso.

a) em torno do eixo dos x

b) em torno do eixo dos z

SOLUÇÃO

$x^2 - 4z^2 = 16$ ou $\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$ é uma hipérbole, onde

$a^2 = 16$ e $b^2 = 4 \Rightarrow a = 4$ e $b = 2$

Portanto, $x^2 - 4z^2 = 16$ é uma hipérbole de eixo transverso ou real sobre (paralelo) o eixo das abscissas (eixo dos x) e eixo conjugado ou imaginário sobre (paralelo) o eixo das cotas (eixo dos z).

a) rotação em torno do eixo dos x

Seja $Q(x,\ 0,\ z_1)$ um ponto pertencente à hipérbole $x^2 - 4z^2 = 16$

Logo, $x^2 - 4{z_1}^2 = 16 \implies x^2 - 16 = 4{z_1}^2 \implies {z_1}^2 = \dfrac{x^2 - 16}{4}\ (I)$

Ao girar a curva (hipérbole) em torno do eixo dos x, o ponto $Q(x,\ 0,\ z_1)$ descreverá uma circunferência cujo centro é o ponto *R(x, 0, 0)*.

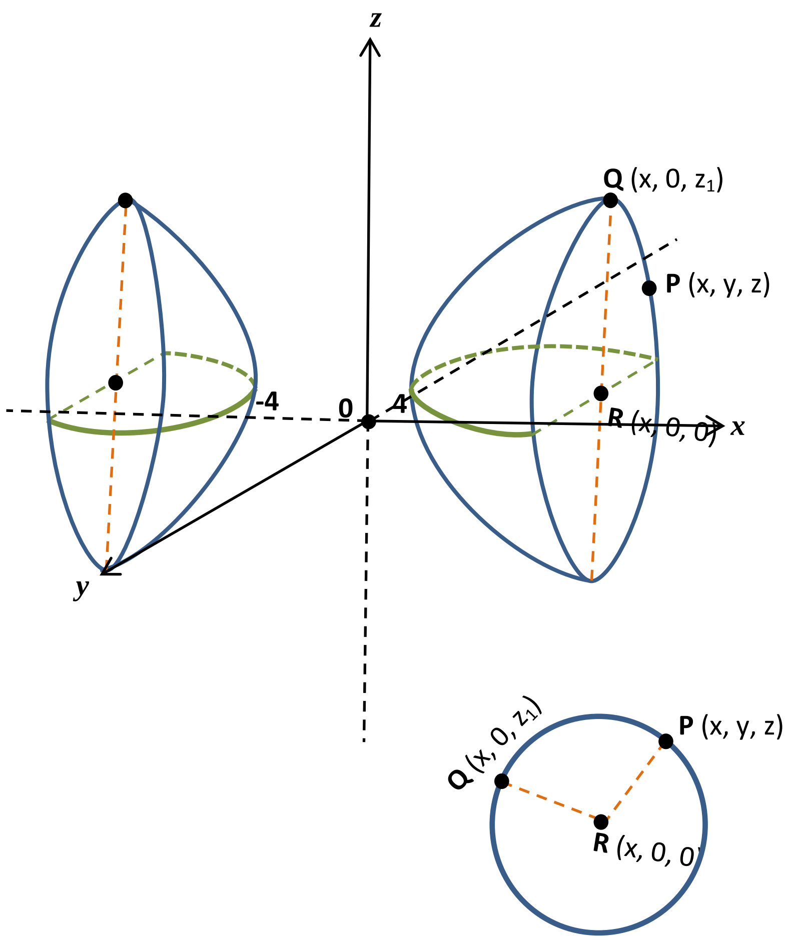
Sendo ***P(x, y, z)*** um ponto genérico dessa circunferência, tem-se que $\overline{PR} = \overline{QR} = raio$ da circunferência.

Assim, $\overline{PR} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (0-0)^2 + (z_1-0)^2} = \overline{QR}$

$\therefore\ y^2 + z^2 = {z_1}^2\ (II) \quad (I)$ *em* (II), *vem:*

$$y^2 + z^2 = \frac{x^2 - 16}{4} \implies \boldsymbol{4y^2 + 4z^2 = x^2 - 16} \implies x^2 - 4y^2 - 4z^2 = 16$$

A superfície é uma ***hiperboloide de revolução de 2 folhas.***



b) rotação em torno do eixo dos z

Seja $Q(x_1,\ 0,\ z)$ um ponto pertencente à hipérbole $x^2 - 4z^2 = 16$.

Logo, ${x_1}^2 - 4z^2 = 16 \implies {x_1}^2 - 4z^2 = 16 \implies {x_1}^2 = 16 + 4z^2.\ (I)$

Ao girar a curva (hipérbole) em torno do eixo dos ***z***, o ponto $Q(x_1,\ 0,\ z)$ descreverá uma circunferência cujo centro é o ponto *R(0, 0, z)*.

Sendo ***P(x, y, z)*** um ponto genérico dessa circunferência, tem-se que $\overline{PR} = \overline{QR} = raio$ da circunferência.

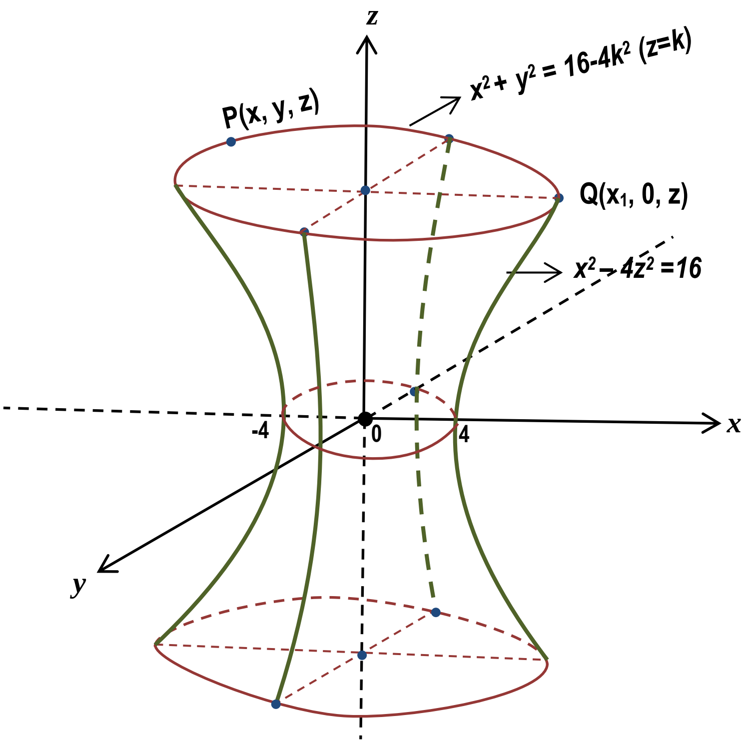
$$\overline{PR} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{(x_1-0)^2 + (0-0)^2 + (z-z)^2} = \overline{QR}$$

$\therefore\ x^2 + y^2 = {x_1}^2\ (II)$ $\quad (I)$ *em* (II), *vem:* $x^2 + y^2 = 16 + 4z^2 \implies$ $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 4z^2 = 16} \implies x^2 + y^2 - 4z^2 = 16$

A superfície é uma ***hiperboloide de revolução de 1 folha.***

__NOTA:__

Na equação de uma hiperboloide, a quantidade de sinais negativos (-) existentes na equação indica o número de folhas da superfície, ou seja: **1 sinal (-)** $\implies$ 1 folha; **2 sinais (-)** $\implies$ 2 folhas.



DEFINIÇÃO

HIPERBOLOIDE CIRCULAR OU DE REVOLUÇÃO é a superfície gerada pela rotação (ou revolução) de uma hipérbole da forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ em torno de um de seus eixos, eixo transverso ou eixo conjugado, ou em torno de um dos eixos coordenados.

Exemplo: Obtenha a equação e faça o esboço do gráfico da superfície gerada pela revolução da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ em torno do eixo das abscissas (eixo dos x).

SOLUÇÃO

Seja $Q(x,\ y_1,\ 0)$ um ponto pertencente à hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{y^2} = 1$. Logo, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{{y_1}^2}{b^2} = 1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{{y_1}^2}{b^2} \Rightarrow {y_1}^2 = b^2\left(\frac{x^2 - a^2}{a^2}\right)\ (I).$$

Ao girar a curva (hipérbole) em torno do eixo dos x, o ponto $Q(x,\ y_1,\ 0)$ descreverá uma circunferência cujo centro é o ponto *R(x, 0, 0)*.

Sendo ***P(x, y, z)*** um ponto genérico dessa circunferência, tem-se que $\overline{PR} = \overline{QR} = raio$ da circunferência.

$$\overline{PR} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y_1-0)^2 + (0-0)^2} = \overline{QR}$$

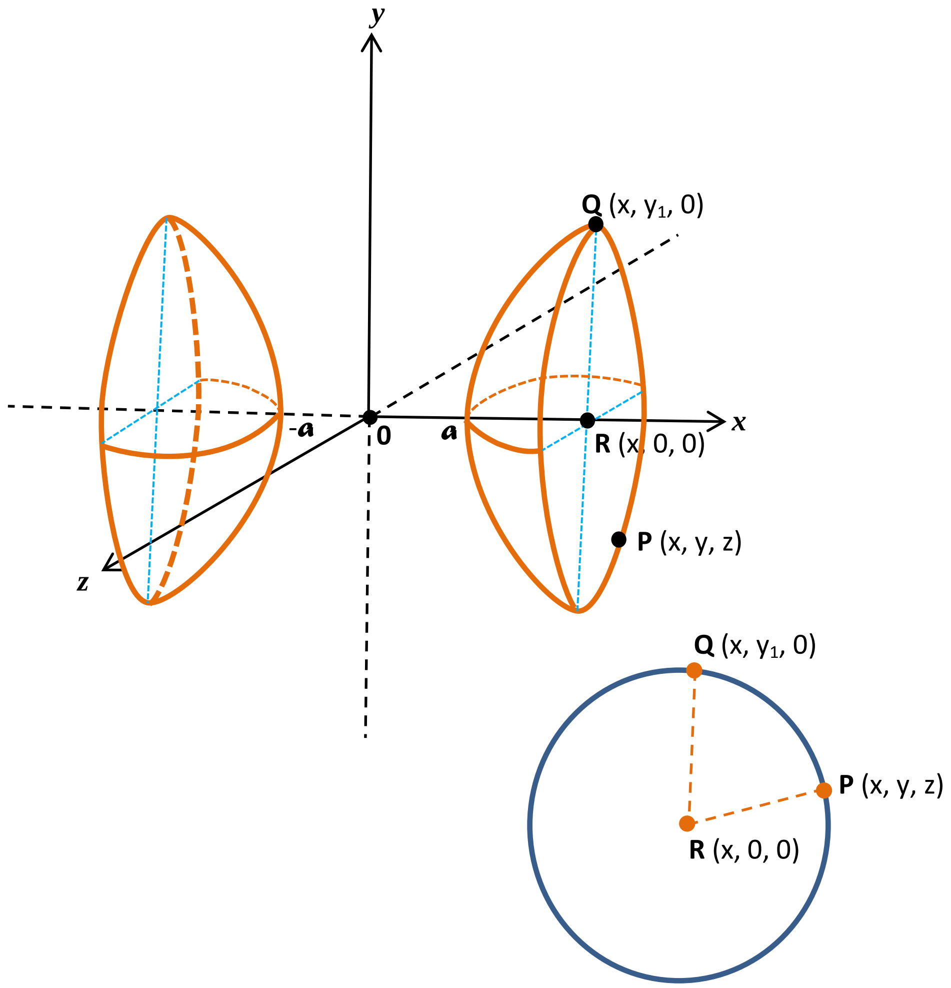
$$\therefore\ y^2 + z^2 = {y_1}^2\ (II).$$

(I) *em* (II), *vem:* $y^2 + z^2 = b^2\left(\frac{x^2 - a^2}{a^2}\right) \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1\ \therefore$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$ ***Equação da Hiperboloide de Revolução de 2 folhas (dois sinais (-)), com eixo de rotação sobre o eixo dos x.***

OBSERVAÇÃO: A equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $com\ a \neq b \neq c$, representa uma hiperboloide elíptica (não de revolução) de 2 folhas, com eixo sobre o eixo dos x.

A equação $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $com\ a \neq b \neq c$, representa uma hiperboloide elíptica (não de revolução) de 2 folhas, com eixo sobre o eixo dos y.



Exemplo: Obtenha a equação e faça o esboço do gráfico da superfície gerada pela revolução da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ em torno do eixo das ordenadas (eixo dos **y**).

<u>**SOLUÇÃO**</u>

Seja $Q(x_1,\ y,\ 0)$ um ponto pertencente à hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{y^2} = 1$. Logo, $\frac{{x_1}^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\Rightarrow \frac{{x_1}^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \ \Rightarrow {x_1}^2 = a^2\left(\frac{b^2 + y^2}{b^2}\right) \ (I).$$

Ao girar a curva (hipérbole) em torno do eixo dos y, o ponto $Q(x_1,\ y,\ 0)$ descreverá uma circunferência cujo centro é o ponto *R(0, y, 0).*

Sendo ***P(x, y, z)*** um ponto genérico dessa circunferência, tem-se que $\overline{PR} = \overline{QR} = raio$ da circunferência.

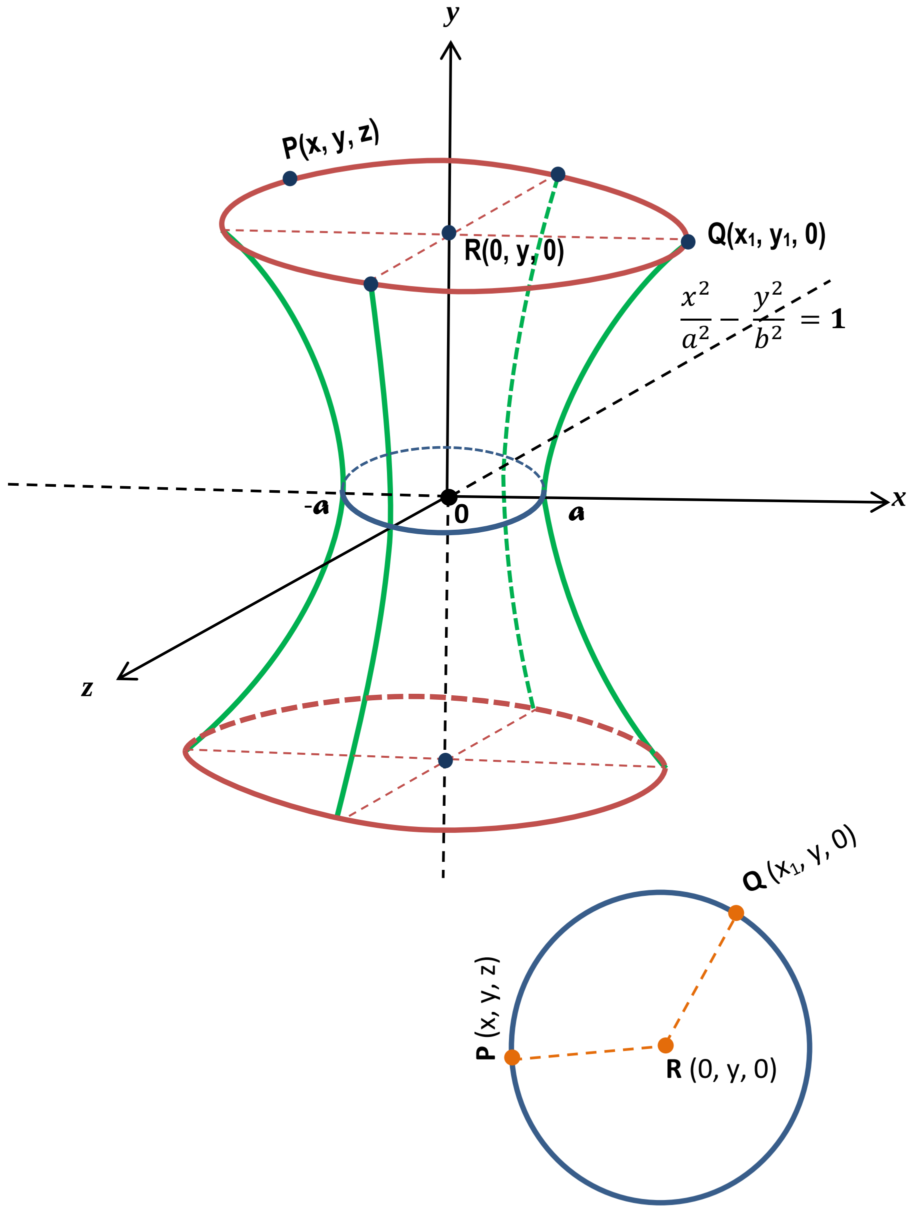
$$\overline{PR} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x_1-0)^2 + (y-y)^2 + (0-0)^2} = \overline{QR}$$

$$\therefore\ x^2 + z^2 = {x_1}^2 \ (II).$$

(I) *em* (II), *vem:* $x^2 + z^2 = a^2(\frac{b^2 + y^2}{b^2}) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + 1 \therefore$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$ ***Equação da Hiperboloide de Revolução de 1 folha (um sinal (-)), com eixo de rotação sobre o eixo dos y.***

A equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $com\ a \neq b \neq c$, representa uma hiperboloide elíptica (não de revolução) de 1 folha, com eixo sobre o eixo dos y.

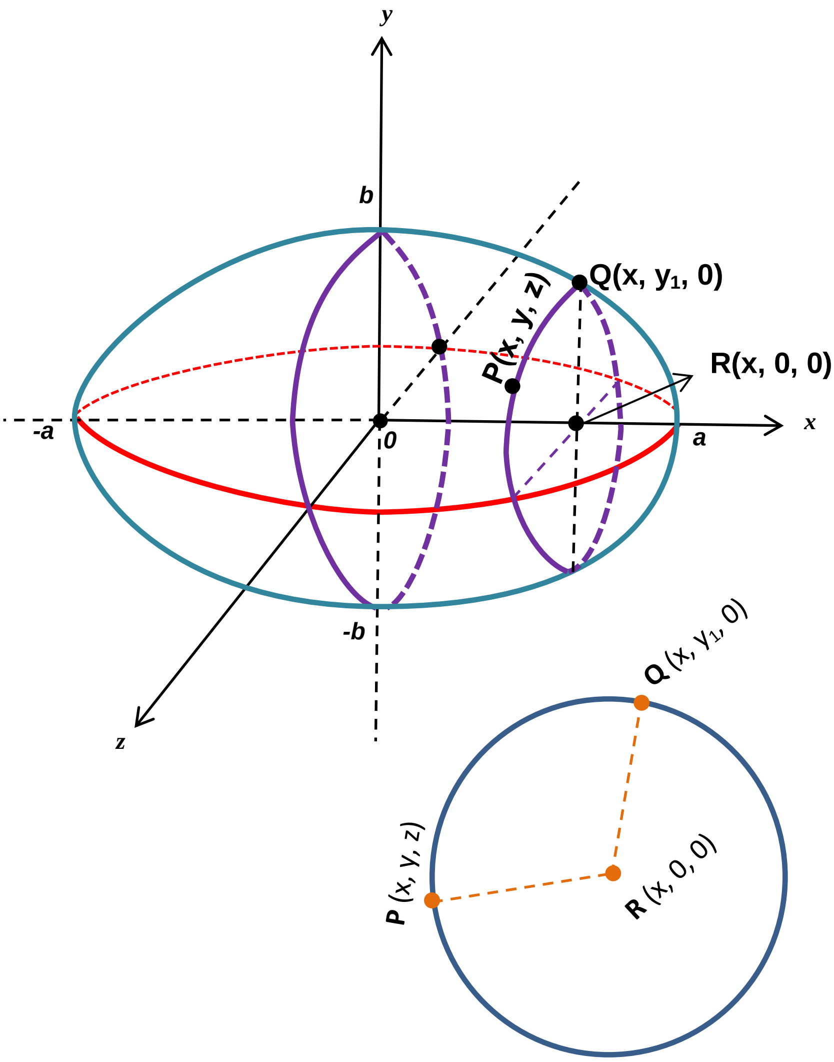


NOTA:
Na equação da Superfície Hiperbólica, o termo com sinal diferente dos outros dois termos indica o eixo de rotação da superfície.

DEFINIÇÃO

ELIPSOIDE CIRCULAR OU DE REVOLUÇÃO é a superfície gerada pela rotação ou revolução da elipse em torno de um de seus eixos, normalmente em torno do eixo maior.

Exemplo: Obtenha a equação e faça o esboço do gráfico da superfície gerada pela revolução da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ em torno do eixo dos x (eixo das abscissas).



SOLUÇÃO

Seja $Q(x,\ y_1,\ 0)$ um ponto pertencente à elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Logo, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{{y_1}^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow\ 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{{y_1}^2}{b^2} \ \Rightarrow\ {y_1}^2 = b^2\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right)\ (I).$

Ao girar a curva (elipse) em torno do eixo dos **x**, o ponto $Q(x,\ y_1,\ 0)$ descreverá uma circunferência cujo centro é o ponto *R(x, 0, 0)*.

Sendo ***P(x, y, z)*** um ponto genérico dessa circunferência, tem-se que $\overline{PR} = \overline{QR} = raio$ da circunferência.

$$\overline{PR} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y_1-0)^2 + (0-0)^2} = \overline{QR}$$

$\therefore\ y^2 + z^2 = {y_1}^2\ (II).$

(I) *em* (II), *vem:* $y^2 + z^2 = b^2\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right) \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}\ \therefore$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$

Equação da Elipsoide de Revolução ou Circular de eixo de rotação sobre o eixo dos x.

NOTA: A equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ com\ a \neq b \neq c$, representa uma elipsoide elíptica (não de revolução), com eixo sobre o eixo dos ***x***.

Quando $a = b = c$, a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ ou $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

representa uma ***superfície esférica.***

DEFINIÇÃO

PARABOLOIDE CIRCULAR OU DE REVOLUÇÃO é a superfície gerada pela rotação ou revolução de uma ***parábola*** em torno do seu eixo de simetria.

Exemplo: Obtenha a equação e faça o esboço do gráfico da superfície gerada pela revolução da parábola $ax^2 = by$ em torno do eixo dos **y** (eixo das ordenadas).

SOLUÇÃO

Seja $Q(x_1,\ y,\ 0)$ um ponto pertencente à parábola $ax^2 = by$.

Logo, $ax_1{}^2 = by \implies x_1{}^2 = \frac{by}{a}(I)$

Ao girar a curva (parábola) em torno do eixo dos **y**, o ponto $Q(x_1,\ y,\ 0)$ descreverá uma circunferência cujo centro é o ponto *R(0, y, 0)*.

Sendo ***P(x, y, z)*** um ponto genérico dessa circunferência, tem-se que $\overline{PR} = \overline{QR} = raio$ da circunferência.

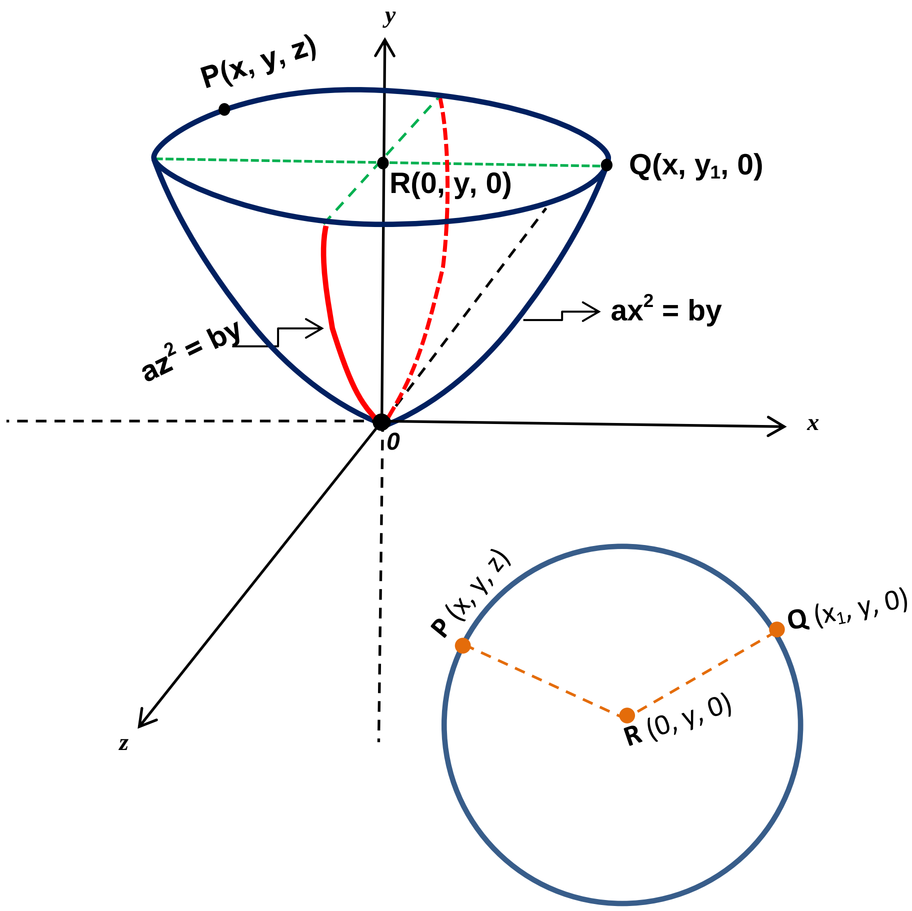
$$\overline{PR} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x_1-0)^2 + (y-y)^2 + (0-0)^2} = \overline{QR}$$

$$\therefore\ x^2 + z^2 = x_1{}^2\ (II)$$

(I) *em* (II), *vem:* $x^2 + z^2 = \frac{by}{a}\ \therefore\ ax^2 + az^2 = by.$

Equação da Paraboloide de Revolução ou Circular de eixo de rotação sobre o eixo dos y.

NOTA: A equação $ax^2 + cz^2 = by$, $com\ a \neq c$, representa uma paraboloide elíptica (não de revolução), com eixo sobre o eixo dos y.



DEFINIÇÃO

PARABOLOIDE HIPERBÓLICO ou **SELA** é a superfície ou lugar geométrico de uma equação da forma $ax^2 - bz^2 = cy$, com *c > 0.*

A seção por um plano ***y = k*** (*k > 0), é a hipérbole* $\boldsymbol{ax^2 - bz^2 = ck}$***,*** cujos eixos transverso e conjugado são paralelos aos eixos das abscissas (eixo dos x) e das ordenadas (eixo dos y).

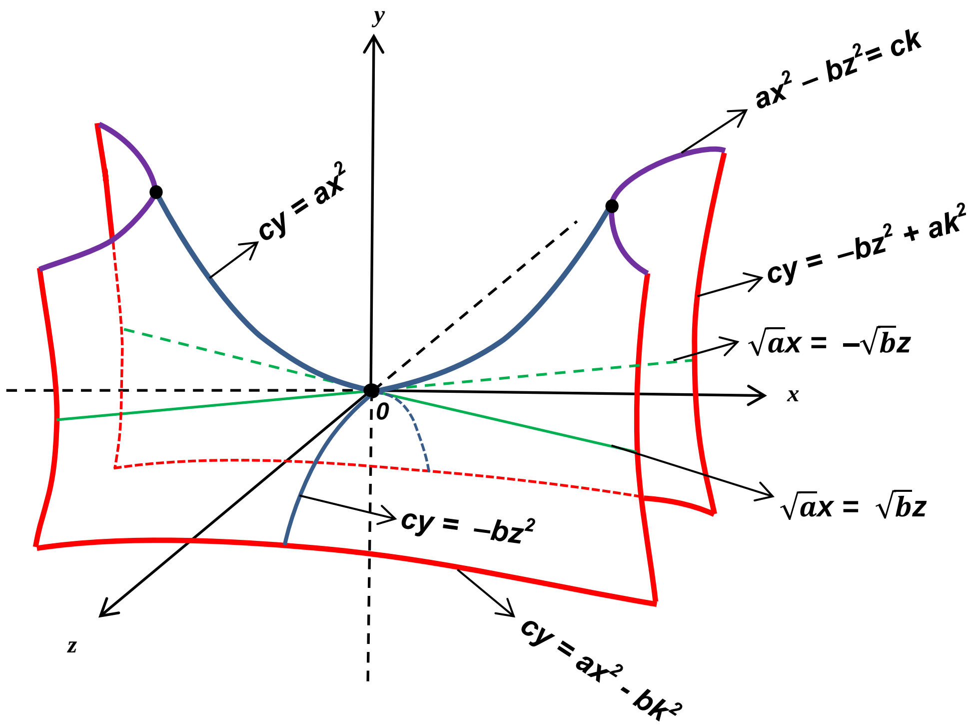
A seção por um plano ***x = k,*** são parábolas de equações $\boldsymbol{cy = -bz^2 + ak^2}$

A seção por um plano ***z = k,*** são parábolas de equações $\boldsymbol{cy = ax^2 - bk^2}$

A seção por um plano ***x = 0,*** é a parábola de equação $\boldsymbol{cy = -bz^2}$

A seção por um plano ***y = 0,*** é o par de retas de equações $\boldsymbol{\sqrt{a}.x = \pm\sqrt{b}.z}$

A seção por um plano ***z = 0,*** é a parábola de equação $\boldsymbol{cy = ax^2}$



DEFINIÇÃO

SUPERFÍCIE CÔNICA ou simplesmente **CONE** é a superfície gerada por uma ***reta*** que gira em torno de um dos eixos coordenados, passando sempre por um mesmo ponto, denominado de **vértice** da superfície cônica.

Exemplo: Obtenha a equação e faça o esboço do gráfico da superfície gerada pela revolução da reta (r): $ax + by + c = 0$ em torno do eixo dos **y** (eixo das ordenadas).

SOLUÇÃO

Seja $Q(x_1,\ y,\ 0)$ um ponto pertencente à reta $ax + by + c = 0$. Desta forma, $ax_1 + by + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\dfrac{by + c}{a}\ (I)$

Ao girar a curva (reta) em torno do eixo dos **y**, o ponto $Q(x_1,\ y,\ 0)$ descreverá uma circunferência cujo centro é o ponto *R(0, y, 0)*.

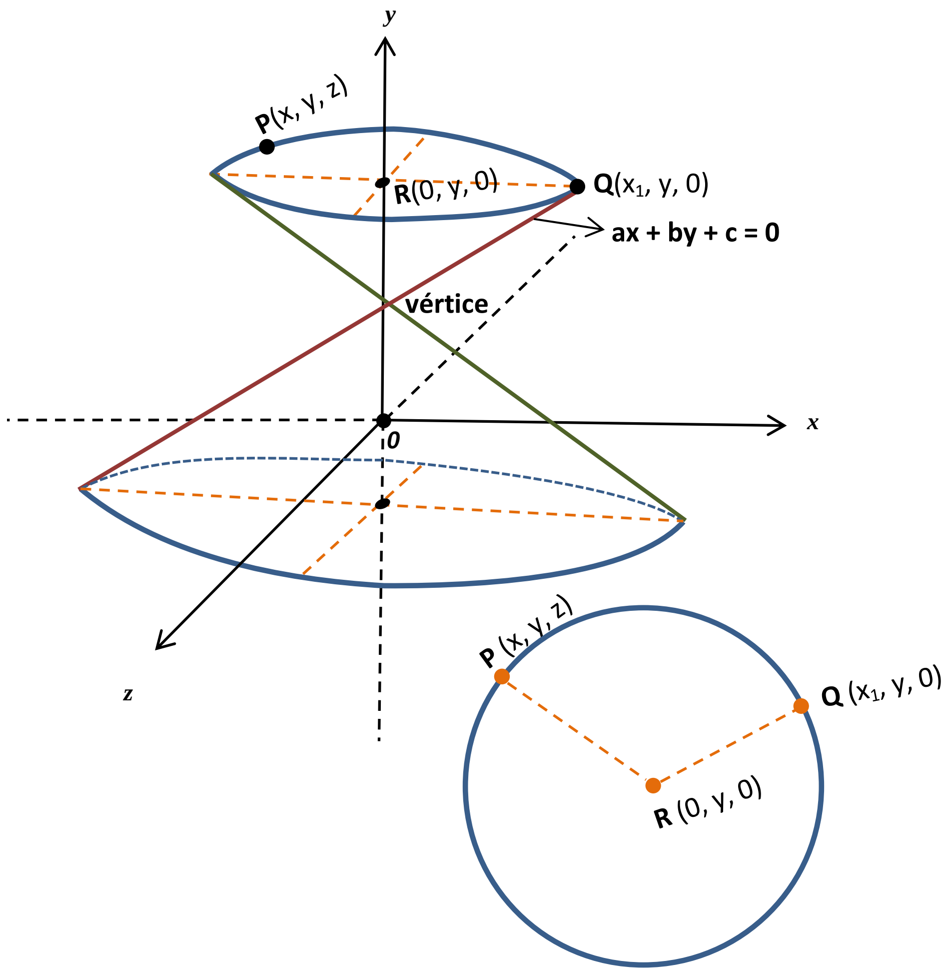
Sendo ***P(x, y, z)*** um ponto genérico dessa circunferência, tem-se que $\overline{PR} = \overline{QR} = raio$ da circunferência.

$$\overline{PR} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x_1-0)^2 + (y-y)^2 + (0-0)^2} = \overline{QR}$$

$\therefore\ x^2 + z^2 = {x_1}^2\ (II).\ (I)$ *em* (II), *vem:* $x^2 + z^2 = \left(-\dfrac{by + c}{a}\right)^2$

$\therefore\ a^2x^2 + a^2z^2 = (by + c)^2 \Longrightarrow a^2x^2 + a^2z^2 - (by + c)^2 = 0$

Equação da Superfície Cônica de Revolução ou Circular



NOTA:

A equação $ax^2 + bz^2 - cy^2 = 0$, com $a \neq b$, representa uma ***superfície cônica*** (ou simplesmente ***cone***) não de revolução, ou seja, uma ***superfície cônica elíptica*** com vértice na origem O(0, 0, 0).

DEFINIÇÃO

SUPERFÍCIE CILÍNDRICA, ou simplesmente **CILINDRO,** é a superfície gerada por uma reta móvel que se desloca ao longo de uma curva plana ou cônica mantendo-se paralelamente a uma reta fixa não pertencente ao plano da curva plana ou cônica. A curva plana ou cônica é denominada ***diretriz*** da superfície cilíndrica e a reta móvel é chamada de ***geratriz*** da superfície.

Normalmente a reta fixa (e a geratriz) é perpendicular ao plano da curva plana ou cônica e, neste caso, a equação da superfície cilíndrica (ou cilindro) é a mesma equação da curva plana ou cônica.

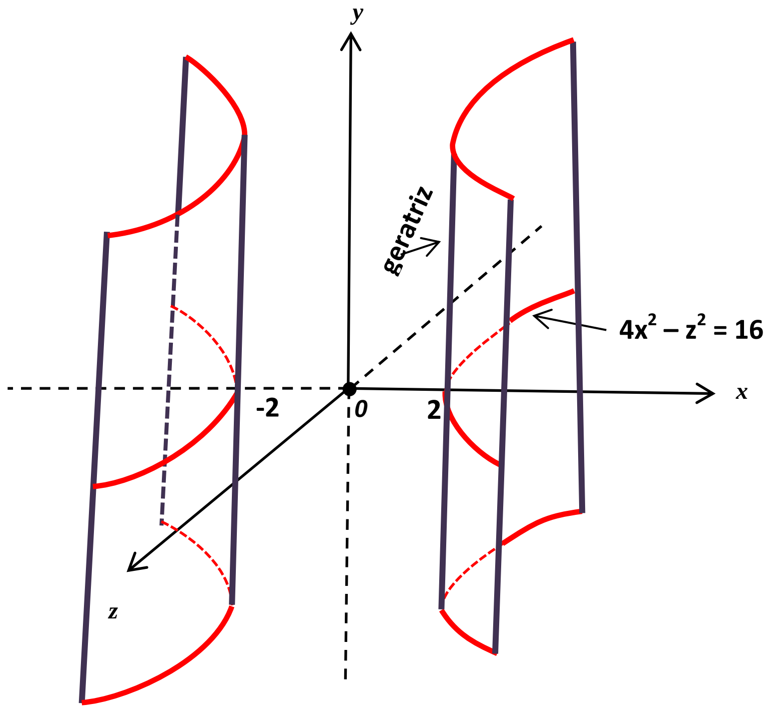
Exemplo: Discuta, identifique e esboce o gráfico de cada uma das superfícies seguintes:

a) $4x^2 - z^2 = 16$
b) $4x^2 + z^2 = 16$
c) $4x^2 + z = 2$
d) $4x^2 + y^2 + z = 2$

SOLUÇÕES

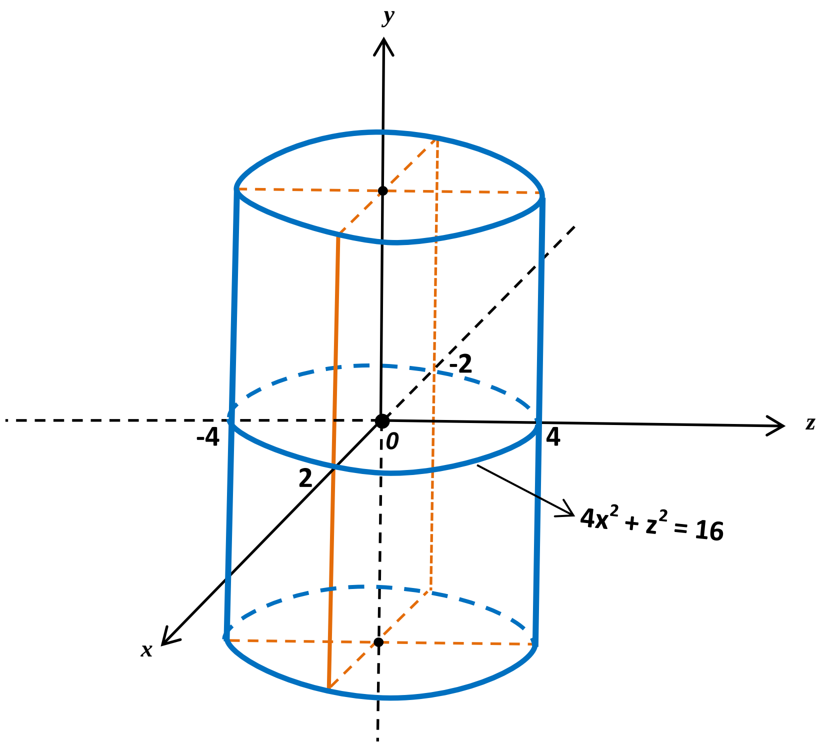
a) $4x^2 - z^2 = 16$ ou $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{z^2}{16} = 1$ $(a^2 = 4 \;\; e \;\; b^2 = 16 \;\; \therefore \;\; a = 2 \;\; e \;\; b = 4)$

Discussão: A equação $4x^2 - z^2 = 16$ representa, no plano, uma ***hipérbole*** com eixo transverso ou real sobre o eixo dos **x** e eixo conjugado ou imaginário sobre o eixo dos **z.** **Portanto,** no espaço, representa uma ***superfície cilíndrica hiperbólica***, uma vez que a equação da superfície cilíndrica é a mesma equação da curva plana ou cônica **(diretriz).**



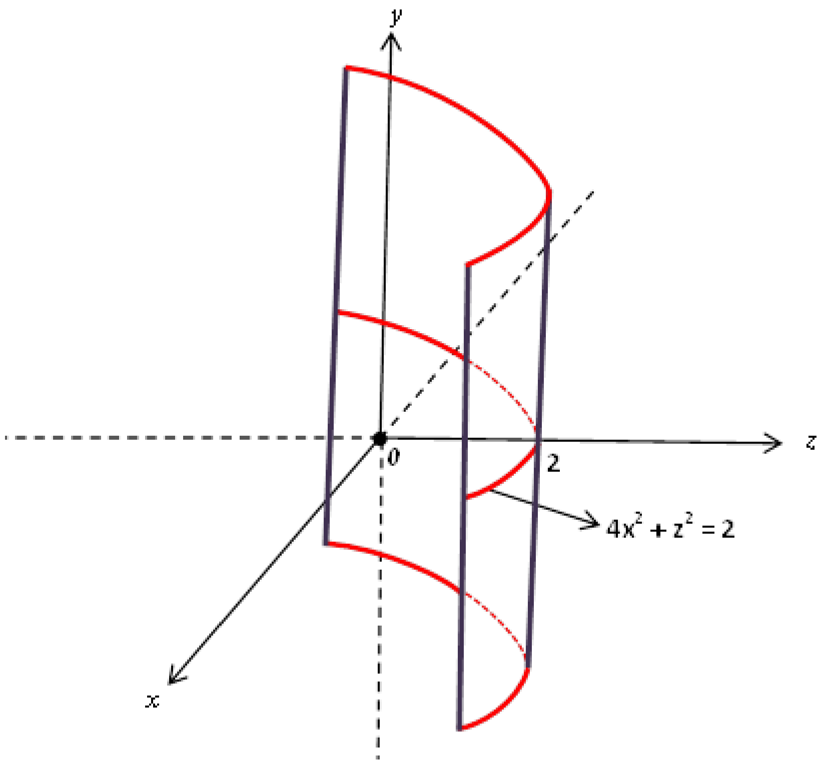
b) $4x^2 + z^2 = 16$ ou $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{z^2}{16} = 1$ $(a^2 = 16$ e $b^2 = 4$ $\therefore$ $a = 4$ e $b = 2)$

Discussão: A equação $4x^2 + z^2 = 16$ representa, no plano, uma **elipse** com eixo maior sobre o eixo dos **z** e eixo menor sobre o eixo dos **x. Portanto,** no espaço, representa uma ***superfície cilíndrica elíptica (cilindro elíptico)***, uma vez que a equação da superfície cilíndrica é a mesma equação da curva plana ou cônica **(diretriz).**



c) $4x^2 + z = 2$

Discussão: A equação $4x^2 + z = 2$ representa, no plano, uma **parábola** com eixo de simetria sobre o eixo dos **z. Portanto,** no espaço, representa uma ***superfície cilíndrica parabólica (cilindro parabólico)***, uma vez que a equação da superfície cilíndrica é a mesma equação da curva plana ou cônica **(diretriz).**



d) $4x^2 + y^2 + z = 2$

Discussão:

1) Se *x = 0*, tem-se $y^2 + z = 2$ ou $z = -y^2 + 2$, que representa uma ***parábola*** no plano y0z.

2) Se *y = 0,* tem-se $4x^2 + z = 2$ ou $z = -4x^2 + 2$, que representa uma **parábola** no plano x0z.

3) Se *z = 0,* tem-se $4x^2 + y^2 = 2$, que representa uma **elipse** no plano x0y.

4) Se *x = k,* tem-se $4k^2 + y^2 + z = 2$ ou $z = -y^2 + 2 - 4k^2$, que representa uma **parábola.**

5) Se *y = k,* tem-se $4x^2 + k^2 + z = 2$ ou $z = -4x^2 + 2 - k^2$, que representa uma **parábola.**

6) Se *z = k,* tem-se $4x^2 + y^2 + k = 2$ ou $4x^2 + y^2 = 2 - k$, que representa uma **elipse,** desde que $2 - k \geq 0$.

Assim, a superfície é uma **parabolóide elíptica (não de revolução)**, com eixo sobre o eixo dos **z.**