Sistemas lineares

Aula 6 – Transformada de Laplace

Transformada inversa de laplace

- Transformada Inversa de Laplace
  - $X(s)$ e RDC $\Rightarrow x(t)$ única
- Metódos
  - Inversão pela Definição
  - Inversão pela Expansão em Frações Parciais
    - Polos de Primeira Ordem – polos distintos
    - Polos de n-ésima Ordem – polos repetidos

Inversa pela definição

- Fórmula Geral da Transformada Inversa de Laplace :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{s} X(s)e^{st}ds$$

- que é uma integral de contorno no plano complexo s
- A solução desta integral pode ser obtida pelo Teorema de Resíduo de Cauchy
- Embora esta fórmula calcule a Transformada Inversa de Laplace, na prática usa-se procedimentos mais simples de busca em tabelas, para transformadas na forma **racional**

Inversa pela expansão em frações parciais

- Uma transformada de Laplace é dita racional se ela é uma razão de polinômios em s:

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k\frac{(s-z_1)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)\ldots(s-p_n)}$$

- Se $X(s)$ for função racional própria $(m < n)$, então ela pode ser invertida usando a expansão em frações parciais.

  - Pólos simples (distintos):

$$X(s) = k\frac{(s-z_1)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)\ldots(s-p_n)} = \frac{c_1}{s-p_1} + \cdots + \frac{c_n}{s-p_n}$$

Os coeficientes são dados por:

$$c_i = (s-p_i)\,X(s)\Big|_{s=p_i}$$

Inversa pela expansão em frações parciais

- Uma transformada de Laplace é dita racional se ela é uma razão de polinômios em s:

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k\frac{(s-z_1)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)\ldots(s-p_n)}$$

- Se $X(s)$ for função racional própria ($m < n$), então ela pode ser invertida usando a expansão em frações parciais.

  - Pólos múltiplos (repetidos):

$$X(s) = k\frac{(s-z_1)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)\ldots(s-p_1)} = k\frac{(s-z_1)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)^r} = \frac{k_{r-1}}{s-p_1} + \cdots + \frac{k_0}{(s-p_n)^r}$$

Os coeficientes são dados por:

$$k_i = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{ds^i}\left[(s-p_i)^r X(s)\right]\Big|_{s=p_i}$$

Exemplos

- Exemplo 1:

$$X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3}, Re(s) > -1$$

Resolução:

$$X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+3}$$

$$c_1 = (s+1)\,X(s)\Big|_{s=-1} = \frac{2s+4}{s+3}\Big|_{s=-1} = 1$$

$$c_2 = (s+3)\,X(s)\Big|_{s=-3} = \frac{2s+4}{s+1}\Big|_{s=-3} = 1$$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3}$$

Como a RDC é $Re(s) > -1$, então a $x(t)$ é unilateral direito:

$$x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-3t}u(t)$$

Exemplos

- Exemplo 2:

$$X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3}, Re(s) < -3$$

Resolução:

$$X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+3}$$

$$c_1 = (s+1)\,X(s)\Big|_{s=-1} = \frac{2s+4}{s+3}\bigg|_{s=-1} = 1$$

$$c_2 = (s+3)\,X(s)\Big|_{s=-3} = \frac{2s+4}{s+1}\bigg|_{s=-3} = 1$$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3}$$

Como a RDC é $Re(s) < -3$, então a $x(t)$ é unilateral esquerdo:

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-3t}u(-t)$$

Exemplos

- Exemplo 3:

$$X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3}, -3 < Re(s) < -1$$

Resolução:

$$X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+3}$$

$$c_1 = (s+1)\,X(s)\Big|_{s=-1} = \frac{2s+4}{s+3}\Big|_{s=-1} = 1$$

$$c_2 = (s+3)\,X(s)\Big|_{s=-3} = \frac{2s+4}{s+1}\Big|_{s=-3} = 1$$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3}$$

Como a RDC é $Re(s) < -3$, então a $x(t)$ é bilateral:

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) + e^{-3t}u(t)$$

Exemplos

- Exemplo 4:

$$X(s) = \frac{s^2 + 2s + 5}{(s+3)(s+5)^2}, Re(s) > -3$$

Resolução:

$$X(s) = \frac{c_1}{s+3} + \frac{k_1}{s+5} + \frac{k_0}{(s+5)^2} = \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+5} - \frac{10}{(s+5)^2}$$

$$c_1 = (s+3)\,X(s)\Big|_{s=-3} = \left.\frac{s^2+2s+5}{(s+5)^2}\right|_{s=-3} = 2$$

$$k_0 = (s+5)^2\,X(s)\Big|_{s=-5} = -10$$

$$k_1 = \frac{d}{ds}[(s+5)^2\,X(s)]\Big|_{s=-5} = \frac{d}{ds}[\frac{s^2+2s+5}{s+3}]\Big|_{s=-5} = -1$$

Como a RDC é Re(s)>-3, x(t) é unilateral direito:

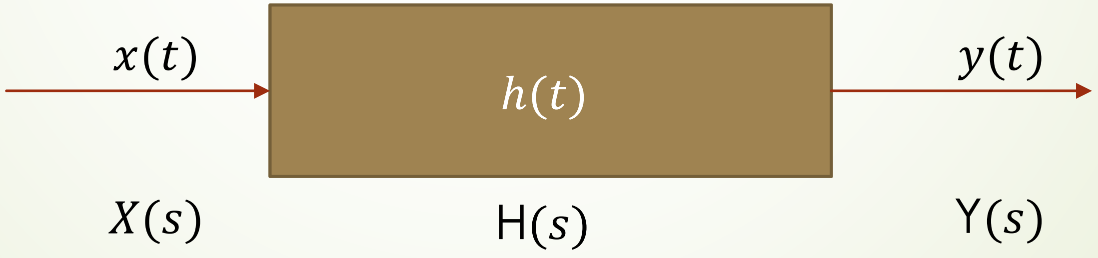
$$x(t) = 2e^{-3t}(t) - e^{-5t}u(t) - 10te^{-5t}u(t)$$

Função de Transferência

- Função de Transferência, ou Função Sistema, é definida como a Transformada de Laplace da Resposta Impulsiva de um SLIT;

$$y(t) = x(t) * h(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} Y(s) = X(S)H(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$



Função de Transferência

- Algumas propriedades dos SLIT's podem ser associadas às características de H(s) no plano s:
  - Causalidade: a RDC deve ser a região à direita de todos os pólos
  - Estabilidade: a RDC deve conter o eixo vertical $s = j\omega$
- Sistemas causais e estáveis:
  - Todos os pólos da função de transferência destes sitemas devem estar no semi-plano esquerdo do plano s (todos com partes reais negativas) e a RDC deve conter o eixo vertical

$$\boldsymbol{Re(s) > \sigma_{máx}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{máx} < 0}$$

A RDC deve ser especificada pelas condições complementares do sistema, como estabilidade ou causalidade.

Função de Transferência

- Relembrando:
  - Equação diferencial geral que descreve um sistema:

$$\frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \cdots + a_{N-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_N y(t) = b_{N-M} \frac{d^M x(t)}{dt^M} + b_{N-M+1} \frac{d^{M-1} x(t)}{dt^{M-1}} + \cdots + b_{N-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_N x(t)$$

- Aplicando a Transformada de Laplace e considerando as condições iniciais nulas:

$$s^N Y(s) + a_1 s^{N-1} Y(s) + \cdots + a_N Y(s) = b_{N-M} s^N X(s) + b_{N-M-1} s^{M-1} X(s) + \cdots + b_N X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_{N-M} s^N + b_{N-M-1} s^{M-1} + \cdots + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_N}$$

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}}$$

Exemplos

- Exemplo 5: Circuito RC
  - Entrada: $x(t) = v_s(t)$
  - Saída: $y(t) = v_c(t)$

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t)$$

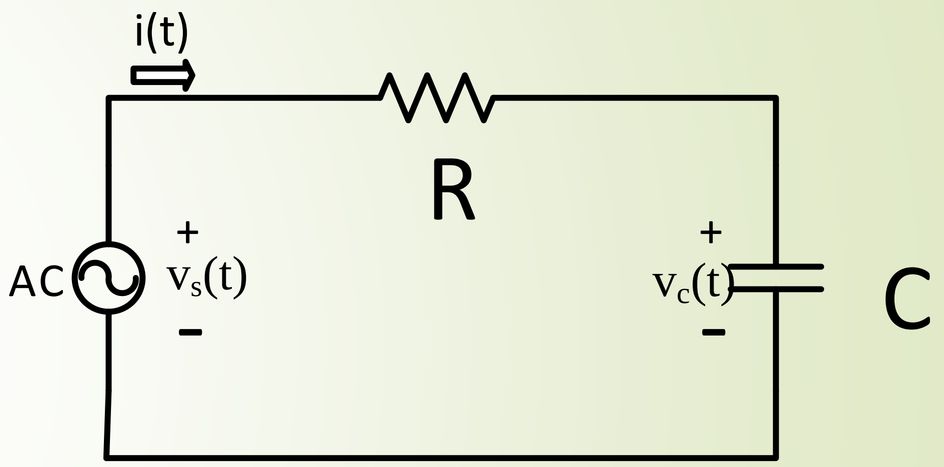
Aplicando Laplace:

$$sY(s) + \frac{1}{RC}Y(s) = \frac{1}{RC}X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1/RC}{s + 1/RC}$$

Aplicando inversa:

$$h(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}u(t)$$

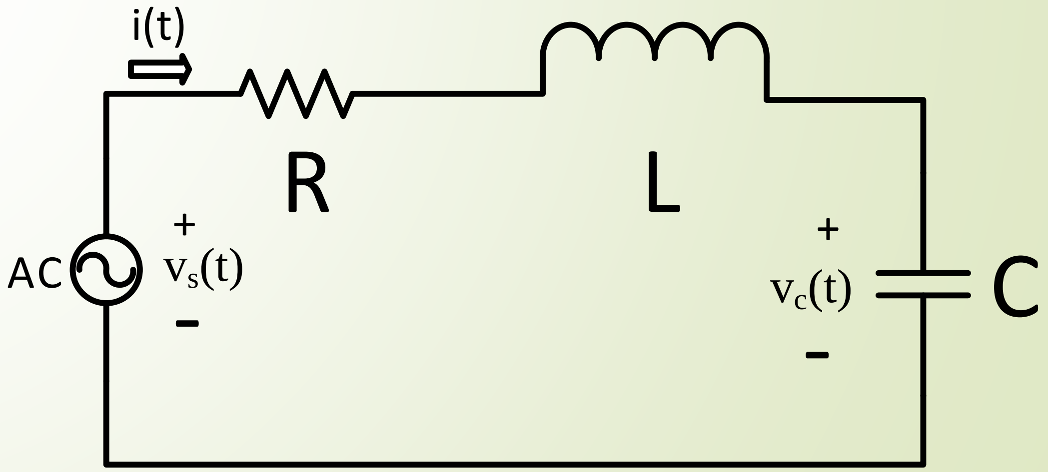


Exemplos

- Exemplo 6: Circuito RLC
  - Usando L = 1 H, R = 3 Ω e C = 0,5 F, determine a função de transferência do circuito considerando $v_s(t)$ como sinal de entrada e $v_C(t)$ como sinal de saída.
    - Pode-se realizar a análise do circuito no domínio da frequêcia

fazendo as considerações:

v(t)	**V(s)**
i(t)	I(s)
R	R
L	sL
C	1/sC

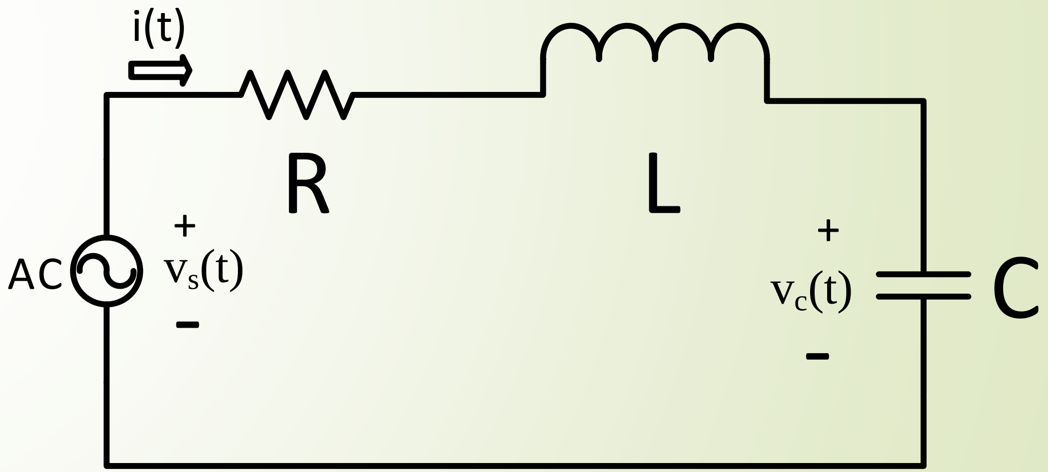


Exemplos

- Exemplo 6: Circuito RLC
  - Usando L = 1 H, R = 3 Ω e C = 0,5 F, determine a função de transferência do circuito considerando $v_s(t)$ como sinal de entrada e $v_c(t)$ como sinal de saída.

$$Y(S) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} X(s)$$

$$H(S) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$



$$H(s) = \frac{1}{sRC + s^2LC + 1} = \frac{1/LC}{s^2 + \frac{sR}{L} + 1/LC} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

Teoremas do Valores Inicial e Final

- Indicam os comportamentos inicial $f(0^+)$ e final $f(\infty)$ de um circuito a partir da Transformada de Laplace, sem que seja necessário calcular sua inversa:

$$\text{Valor Inicial:} \qquad \lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s.F(s)$$

$$\text{Valor Final:} \qquad \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s.F(s)$$

  - Teo. V. Inicial: pressupõe que $f(t)$ não contém nenhuma função impulso
  - Teo. V. Final: todos os pólos de $F(s)$ estejam no semi-plano esquerdo

Exemplo

- Exemplo 7: Determine os valores inicial e final de um sinal x(t) cuja transformada de Laplace unilateral seja:

$$X(s) = \frac{7s + 10}{s(s+2)}$$

- Solução: aplicando o T.V.Inicial

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\frac{7s + 10}{s(s+2)} \quad = 7$$

O T.V.Final é aplicável, pois os pólos de X(s) estão todos do lado esquerdo de s

$$x(\infty) = \lim_{s\to 0} s\frac{7s + 10}{s(s+2)} \quad = 5$$

- Pode ser verificado, fazendo:

$$X(s) = \frac{7s + 10}{s(s+2)} \to x(t) = 5u(t) + 2e^{-2t}u(t)$$